

## Aula 22

Definição: Dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , a **exponencial matricial**  $e^A$  é a matriz  $n \times n$  dada pela série

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + A^2 \frac{1}{2!} + A^3 \frac{1}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Proposição: A matriz solução principal em  $t_0 = 0$  associada ao sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo, de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

é dada pela série  $I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$ , ou seja

$$Y_{t_0=0}(t) = e^{At}.$$

Consequentemente a solução (única) do problema de Cauchy

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{y}_0.$$

Proposição: Dadas matrizes  $A, B, n \times n$ , tem-se

i) Em  $t = 0$ ,  $e^{At} = e^{[0]} = I$ .

ii) Se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

é uma matriz por blocos, então  $e^{At}$  também é uma matriz por blocos e tem-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

iii) Se  $A$  e  $B$  comutam, ou seja, se  $AB = BA$  então  $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ .

iv)  $e^{At}$  é sempre não singular, com inversa  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ .

v) Se

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

então

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}.$$

## Caso $A$ não diagonalizável

### Forma Canónica de Jordan

$$A = SJS^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} [J_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [J_2] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [J_k] \end{bmatrix}$$

Um bloco de Jordan  $[J_i]$  por cada vector próprio independente

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

com vectores de base correspondentes

$$A\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \lambda_i \mathbf{w}_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}$$

$$A\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \lambda_i \mathbf{w}_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1$$

...

## Exponencial da Forma Canónica de Jordan

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} [e^{J_1 t}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [e^{J_2 t}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [e^{J_k t}] \end{bmatrix}$$

com

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$



$\lambda = 2$  multiplicidade algébrica = 2, geométrica = 1.

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Uma só solução linearmente independente da forma  $e^{\lambda t}\mathbf{v}$ ,

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

## Sistemas Lineares Não Homogéneos

### Fórmula da Variação das Constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

**Teorema (Fórmula da Variação das Constantes):** Sejam  $A(t), \mathbf{b}(t)$  respectivamente, uma matriz  $n \times n$  e um vector  $n \times 1$  com entradas reais contínuas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Então, o sistema linear de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t),$$

tem solução geral dada pela **Fórmula da Variação das Constantes**

$$\mathbf{y}(t) = X(t)\mathbf{c} + X(t) \int X^{-1}(t)\mathbf{b}(t)dt,$$

em que  $X(t)$  é uma qualquer matriz solução fundamental do correspondente sistema homogéneo, e  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  uma coluna de constantes arbitrárias.

No caso do problema de Cauchy, com condições iniciais  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ ,  $t_0 \in I$ , a solução é dada por

$$\mathbf{y}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds.$$

Teorema (Fórmula da Variação das Constantes para  $A$  constante):

Quando  $A(t) = A$  é uma matriz constante, a exponencial  $e^{At}$  pode ser usada no lugar de  $X(t)$  obtendo-se, respectivamente, a solução geral

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{c} + e^{At} \int e^{-At} \mathbf{b}(t)dt, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

e a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} \mathbf{b}(s)ds.$$